Progressões Aritméticas

Progressão aritmética é uma sequência numérica na qual, a partir do segundo, cada termo é igual à soma de seu antecessor com uma constante, denominada *razão*.

Fórmula do termo geral de uma P.A.: $\boxed{a_n = a_1 + (n-1).r}$

Soma de termos de uma P.A. finita: $\boxed{S_n = \dfrac{(a_1 + a_n).n}{2}}$

Logo abaixo temos alguns exercícios de progressões aritméticas resolvidos.

1) Dada a P.A. (-19,-15,-11,...) calcule o seu enésimo termo.

Primeiramente encontramos a razão: $r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = -15 - (-19) \Rightarrow r = 4.$

Logo, o termo geral é:

$a_n = a_1 + (n-1).r \;\Rightarrow\; a_n = -19 + (n-1).4 \;\Rightarrow\; a_n = -19 + 4n - 4 \;\Rightarrow\; a_n = 4n - 23$

2) Interpole seis meios aritméticos entre –8 e 13.

No problema: $a_1 = -8, \quad a_n = 13, \quad n = 8$ (pois 6 meios aritméticos serão interpolados entre os dois extremos, que são - 8 e 13. Logo, existem 8 termos na P.A.).

Para interpolar os valores, devemos encontrar a razão:

$a_n = a_1 + (n-1).r \;\Rightarrow\; 13 = -8 + (8-1).r \;\Rightarrow\; 13 = -8 + 7r \;\Rightarrow\; 13 + 8 = 7r \;\Rightarrow$

$7\text{r} = 21 \Rightarrow r = \dfrac{21}{7} \;\Rightarrow\; \text{r} = 3.$

Encontrada a razão, basta interpolar os meios aritméticos:

- 8, - 5, - 2, 1, 4, 7, 10, **13**

3)

3) Escreva uma P.A. de três termos, sabendo que a soma desses termos vale 12 e que a soma de seus quadrados vale 80.

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 12 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 80 \end{cases}$$

Sabemos que $a_2 = a_1 + r$ e que $a_3 = a_1 + 2r$. Então substituimos no sistema acima:

$$\begin{cases} a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) = 12 \\ a_1^2 + (a_1 + r)^2 + (a_1 + 2r)^2 = 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a_1 + 3r = 12 \\ a_1^2 + a_1^2 + 2a_1 r + r^2 + a_1^2 + 4a_1 r + 4r^2 = 80 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a_1 + 3r = 12 \quad \rightarrow \quad a_1 = \dfrac{12 - 3r}{3} \quad \rightarrow \quad a_1 = 4 - r \\ 3a_1^2 + 6a_1 r + 5r^2 = 80 \end{cases}$$

Substituindo na segunda equação temos:

$3(4 - r)^2 + 6(4 - r)r + 5r^2 = 80$

$3(16 - 8r + r^2) + (24 - 6r)r + 5r^2 = 80$

$48 - 24r + 3r^2 + 24r - 6r^2 + 5r^2 = 80$

$48 + 2r^2 = 80 \ \rightarrow \ 2\text{r}^2 = 80 - 48 \ \rightarrow \ 2\text{r}^2 = 32 \ \rightarrow \ \text{r}^2 = 16 \rightarrow \ \text{r} = \sqrt{16} \rightarrow \ \text{r} = \pm 4$

Agora encontramos o primeiro termo:

1) Para $r = 4$:

$a_1 = 4 - \text{r} \ \rightarrow \ \text{a}_1 = 4 - 4 \ \rightarrow \ \text{a}_1 = 0$

P.A : (0,4,8)

1) Para $r = -4$:

$a_1 = 4 - \text{r} \ \rightarrow \ \text{a}_1 = 4 - (-4) \ \rightarrow \ \text{a}_1 = 8$

P.A : (8,4,0)

Resposta : (0,4,8) ou (8,4,0).

4) Calcule quantos números inteiros existem entre 13 e 247 que não são múltiplos de 3.

Entre 13 e 247 existem 233 números. Para calcular quantos números NÃO são múltiplos de 3, nós devemos calcular primeiramente quantos números SÃO múltiplos de 3, e logo após subtrair o número total de números (233) pelo número de múltiplos, o que dará como resultado o número de NÃO múltiplos.

Para calcular o número de múltiplos de 3 :

$a_1 = 15$ (pois é o primeiro múltiplo de 3 depois do 13)

$r = 3$, $\quad a_n = 246$ (pois é o último múltiplo de 3 antes do 247). Basta achar o n, que é o número de múltiplos :

$$a_n = a_1 + (n-1).r \quad \to \quad 246 = 15 + (\mathrm{n} - 1)3 \quad \to \quad 231 = 3\mathrm{n} - 3 \quad \to \quad \mathrm{n} = \frac{234}{3} \quad \to \quad \mathrm{n} = 78$$

Dos 233 números, 78 são múltiplos de 3, logo 155 não são múltiplos de 3.

5) Encontre o valor de x para que a sequência (2x, x+1, 3x) seja uma progressão aritmética.

$$\text{Para ser uma P.A.: } a_3 - a_2 = a_2 - a_1$$
$$3x - (x+1) = (x+1) - 2x$$
$$2x - 1 = 1 - x$$
$$2x + x = 1 + 1 \quad \rightarrow \quad 3x = 2 \quad \rightarrow \quad x = \frac{2}{3}$$

6) Numa progressão aritmética em que $a_2+a_7=a_4+a_k$, o valor de k é:

$$(a_1 + r) + (a_1 + 6r) = (a_1 + 3r) + a_k$$
$$2a_1 + 7r = a_1 + 3r + a_k$$
$$2a_1 - a_1 + 7r - 3r = a_k \quad \rightarrow \quad a_k = a_1 + 4r$$
$$\text{Logo k} = 5, \text{pois } a_5 = a_1 + 4r.$$

7) Se S_n é a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética (-90,-86,-82,...) então o menor valor de n para que se tenha $S_n>0$ é:

$$\text{Pelo enunciado, obtemos os seguintes dados: } \begin{cases} r = 4 \\ a_1 = -90 \\ a_n = 94 \ \text{(pois a } S_{\text{n}} \text{ deve ser maior que zero)} \end{cases}$$

Basta encontrar o número de termos:

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$
$$94 = -90 + (n-1).4$$
$$94 + 90 = 4n - 4$$
$$184 + 4 = 4n \quad \rightarrow \quad n = \frac{188}{4} \quad \rightarrow \quad n = 47$$

8) A soma dos n primeiros números pares positivos é 132. Encontre o

$$r = 2 \ ; \ a_1 = 2 \ ; \ S_n = 132$$
$$a_n = a_1 + (n-1).r \ \rightarrow \ a_n = 2 + (n-1).2 \ \rightarrow \ a_n = 2 + 2n - 2 \ \rightarrow \ a_n = 2n$$

Substituindo na fórmula da soma temos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} \ \rightarrow \ 132 = \frac{(2+2n)n}{2} \ \rightarrow \ n^2 + n - 132 = 0$$
$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4.1.132}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{529}}{2} = \frac{-1 \pm 23}{2} = \begin{cases} n = -12 \\ n = 11 \end{cases} \Rightarrow n = 11$$

valor de n.